

EFFECTO DEL ERROR DE MEDICIÓN EN ÍNDICES DE CAPACIDAD DE PROCESOS

Daniela F. Dianda*

Marta B. Quaglino*

José A. Pagura*

María Laura De Castro**

Resumen. La importancia del análisis de capacidad de procesos deriva de la filosofía de adecuación a los requerimientos del cliente presentes en todo proyecto de calidad. Un proceso será satisfactorio siempre que sus productos respondan a los estándares fijados, ya sea por consideraciones técnicas como por exigencias del mercado. Durante los últimos 30 años se ha desarrollado y estudiado una gran variedad de índices que permiten comparar el comportamiento del proceso con las especificaciones impuestas, aunque casi todos los avances realizados asumen que no existen errores de medición en los datos recolectados, hecho que difícilmente es real en la práctica. Aún el uso de instrumentos de medición de última tecnología no garantiza la ausencia de imprecisiones. Si esto se ignora y el sistema de medición es inadecuado, los datos no reflejarán la realidad del proceso y las conclusiones del análisis podrían ser equivocadas. En este trabajo se realiza una breve reseña de los antecedentes existentes sobre el estudio de los efectos que los errores de medida pueden causar sobre las propiedades de los índices de capacidad de procesos y se realiza un aporte original analizando el efecto de errores sistemáticos sobre las propiedades del estimador del índice de capacidad C_{pk} .

Palabras claves: Estudios de capacidad de procesos, Error de medición sistemático, Sesgo relativo.

* Docentes-Investigadores del Instituto de Investigaciones Teóricas y Aplicadas de la Escuela de Estadística, Facultad de Ciencias Económicas y Estadística, Universidad Nacional de Rosario (UNR), Argentina.

Contacto: daniela.dianda@gmail.com

** Licenciada en Estadística. Facultad de Ciencias Económicas y Estadística. Universidad Nacional de Rosario. Argentina.

Contacto: mldecastro@hotmail.com

MEASUREMENT ERROR EFFECT ON PROCESS CAPABILITY INDICES

Abstract. The importance of process capability analysis stems from the customer satisfaction philosophy present in all quality projects. A process will be satisfactory provided that their products meet the requirements imposed by technical considerations as well as by market demands. Over the past 30 years a variety of indexes has been developed to compare the process performance with the specifications, although most of these advances assume that there are no measurement errors in the collected data, a fact that is hardly true in practice. Even the use of gauges of leading technology does not guarantee accurate and precise data. If this is ignored and the measurement system is inadequate, the data will not reflect the reality of the process, leading to wrong conclusions. This paper presents a brief review of previous researches in the study of the effects that measurement errors have on the properties of the process capability indexes and an original contribution is made by analyzing the effect of systematic errors on the properties of the estimator of the capability index C_{pk} .

Key words: Process capability studies; Systematic measurement error; Relative bias.

Original recibido el 07-07-2016.

Aceptado para su publicación el 15-11-2016.

1. Introducción

“El consumidor es la parte más importante de la línea productiva” es la reconocida frase de William Edward Deming, cuyo espíritu dio origen a diversas concepciones del término calidad. Entre otros, el autor Philip Crosby (1979) sostiene que *“calidad es cumplimiento de requisitos”*, Joseph Juran (1981) opina que *“calidad es adecuación al uso del cliente”*, Armand Feigenbaum (1990) sostiene que calidad es *“satisfacción de las expectativas del cliente”*, y actualmente la serie de Normas de Calidad ISO (2008) define a la calidad como *“el grado en el que un conjunto de características inherentes cumple con los requisitos”*. Más allá de sus diferencias, en todas ellas se reconoce la importancia de satisfacer requisitos.

En la actualidad, esta filosofía de adecuación a los requerimientos está presente en todo proyecto de control y mejora de procesos. Si se reconoce que un proceso es una interacción de diversos actores y tareas, combinados para obtener un resultado determinado, resulta natural que las características de dicho resultado estén sujetas a una cierta variabilidad, de modo que no siempre se logrará el nivel ideal deseado para cada una de ellas. Dada la naturalidad de este hecho en cualquier ámbito o contexto en el que se trabaje, surge de inmediato la necesidad de controlar, o al menos cuantificar, la proporción de veces que el proceso dará resultados indeseados.

Entre las diversas técnicas y procedimientos dedicados al control estadístico de procesos, el *Análisis de Capacidad* ha sido desarrollado con el propósito particular de estudiar el comportamiento del proceso en relación a los requerimientos establecidos para la característica de calidad de interés. Durante los últimos 30 años, se ha desarrollado una amplia variedad de medidas, denominadas Índices de *Capacidad de Procesos*, que permiten comparar su desempeño con las especificaciones impuestas (Kotz y Johnson, 1993; Pearn y Kotz, 2006), siendo un requisito fundamental para su cálculo que el proceso se encuentre bajo control estadístico, ya que de esa manera producirá resultados consistentes en media y dispersión a lo largo del tiempo (Montgomery, 2005).

La “materia prima” necesaria para poder llevar a cabo un análisis de capacidad es, como en la mayoría de los métodos estadísticos, información cuantitativa sobre las variables de interés, obtenida en general mediante mediciones hechas sobre una muestra de unidades del proceso. En cualquier actividad que implique mediciones, una parte de la variabilidad observada será inherente al producto o servicio que está siendo medido, pero otra parte será producto de la forma en que se realice la medición. Por lo tanto, si logra determinarse con anterioridad que el sistema de medición que se utiliza es adecuado, en el sentido de no introducir excesiva variabilidad adicional a las mediciones, se habrá eliminado una posible fuente de variación en el resultado del proceso. De allí, la importancia que tiene la evaluación del sistema de medida como paso previo a su aplicación. Si esto se ignora y el sistema de medición es inadecuado, los datos no reflejarán la realidad del proceso, llevando a conclusiones equivocadas. La relevancia que tienen los

estudios de los sistemas de medida como parte de las actividades de gestión de la calidad es reconocida por diferentes normas de calidad internacionales, que los incorporan como requisitos, como por ejemplo las normas ISO 9001:2015 en su cláusula 7.1.5 (ISO (2015)).

Pueden encontrarse en la bibliografía diversos trabajos dedicados al estudio de los efectos que produce la presencia de errores de medición al aplicar diversas metodologías de análisis estadístico. En el contexto de calidad, el énfasis ha estado puesto sobre el estudio de las distorsiones ocasionadas en dos de las técnicas más ampliamente utilizadas: la construcción de gráficos de control y el análisis de capacidad de procesos (Mittag, 1997; Bordignon y Scagliarini, 2002; Dianda, 2015).

En este trabajo se ha abordado el estudio de esta temática en la línea del análisis de capacidad de procesos univariados bajo distribución normal. Se realiza una reseña de los antecedentes existentes en cuanto al análisis de los efectos que la presencia de errores de medición causa sobre las propiedades de dos de los índices de capacidad más utilizados y difundidos, el índice C_p y el índice C_{pk} . Se realiza además un aporte original estudiando el comportamiento distribucional del estimador del índice C_{pk} considerando la posibilidad de que el sistema de medición esté afectado por errores sistemáticos, situación no tratada aún en la literatura.

2. Sistemas de medición

Un sistema de medición puede definirse como un conjunto de dispositivos, herramientas, procedimientos, personas y ambientes usados para asignar un número a una característica que está siendo medida en un determinado proceso (AIAG, 2002). Cuando un sistema de medición es considerado como un proceso, resulta fácil ver las diversas causas de variación que llevan a mediciones inexactas o poco precisas (Dianda, 2008; Pagura, Quaglino, Dianda y Lupachini, 2010). Puesto que deberán tomarse decisiones en base a tales mediciones, es necesario comprender las causas y el alcance de la variabilidad observada. Un sistema de medición ideal es aquel que produce siempre mediciones correctas, es decir, precisas y exactas.

La *precisión* de un sistema de medición hace referencia a la variabilidad que se observa ante mediciones repetidas de la misma unidad bajo las mismas condiciones. Un sistema de medición será preciso si es capaz de producir los mismos resultados cuando se mide repetidamente una misma unidad, bajo condiciones uniformes (Gutiérrez Pulido y de la Vara Salazar (2009), Montgomery (2009).

La *exactitud* del sistema se refiere a la diferencia que se observa entre el verdadero valor de la característica que se mide y el promedio de las mediciones que se obtienen al aplicar el procedimiento de medición. Un sistema de medición será exacto si posee la habilidad de producir mediciones que, en promedio,

coincidan con el verdadero valor de la característica que se está midiendo (Gutiérrez Pulido y de la Vara Salazar (2009), Montgomery (2009)).

El estudio de la exactitud y la precisión de un sistema de medición permite evaluar cuán cerca está del sistema de medición ideal, y dado que ambas propiedades son de naturaleza diferente, la carencia de cada una de ellas, generará un tipo de error diferente.

El error de medición puede descomponerse en dos elementos: el error sistemático, que hace referencia a la exactitud de la medición, y el error aleatorio, que se corresponde con la precisión de la medición. Para poder describir estas componentes de error, es necesario distinguir entre la *variable latente o real* X , que representa a los verdaderos valores de la característica de calidad de interés, y la *variable empírica u observable* X^e , que se encuentra afectada por los posibles errores de medición en caso de existir.

Los *errores sistemáticos o constantes* son aquellos que permanecen invariables a lo largo de todo el proceso de medida y, por lo tanto, afectan a todas las mediciones de un modo fijo definido. Ante la presencia de error sistemático la variable observable resulta $X^e = X + c$, donde c es una constante real que representa la magnitud del sesgo del sistema de medición, por lo que el efecto que este tipo de error produce es un corrimiento en la media del proceso de c unidades.

El *error aleatorio o estocástico*, en cambio, ocurre cuando las mediciones repetidas, ya sean en un mismo sujeto o en diferentes miembros de la población en estudio, varían de manera no predecible. Bajo este tipo de error la variable empírica resulta $X^e = X + V$, donde V es una variable que representa al error aleatorio que, en general, se asume independiente de la variable de interés X y con distribución normal con media cero y variancia constante σ_v^2 , es decir $V \sim N(0, \sigma_v^2)$.

3. Análisis de capacidad de procesos

En la mayoría de los procesos productivos el interés es asegurar que el proceso opere de modo que los productos resultantes tengan valores de la característica de interés X que en promedio coincidan con un valor objetivo T , permitiéndoles variar dentro de un intervalo definido por un par de límites que reciben el nombre de límites de especificación inferior (*LIE*) y superior (*LSE*). Los estudios de capacidad de procesos permiten cuantificar la habilidad del proceso de operar de acuerdo a estos requerimientos.

En muchas situaciones el valor objetivo T es el punto medio del intervalo de especificación, $m = \frac{LSE + LIE}{2}$, en cuyo caso ($T=m$) se dice que las especificaciones son simétricas. Bajo el supuesto que X es una variable aleatoria con distribución normal, con $E(X)=\mu$ y $Var(X)=\sigma^2$, la habilidad del proceso de producir valores de X dentro del intervalo de especificación (*LIE*; *LSE*) depende de a) la magnitud de σ , y b) de la relación entre μ y T . La gran diversidad de propuestas realizadas para los índices de capacidad varía según la forma en la que éstos incorporan la información de a) y b). En este trabajo se consideran dos de los primeros índices definidos, C_p y C_{pk} , ambos ampliamente difundidos y de muy frecuente uso.

3.1. Índices C_p y C_{pk}

El primer índice de capacidad fue definido por Kane (1986) como:

$$C_p = \frac{LSE - LIE}{6\sigma} \quad (1)$$

Este índice fue diseñado para proveer una medida relativa de la magnitud de la variación total del proceso respecto de la variación permitida por especificación, siendo deseable que éste arroje valores superiores a la unidad, ya que ello indica que el intervalo de variación natural del proceso es menor que la tolerancia especificada.

Sin embargo, un aspecto desfavorable de este índice es que no toma en cuenta ninguna información relativa a la posición de la media del proceso respecto de las especificaciones. De este modo, es posible que en un proceso se obtenga un valor de C_p superior a la unidad, aun cuando el proceso no esté localizado estrictamente dentro del intervalo de especificación (Pearn y Kotz (2006), Montgomery (2009)). De esta manera, este índice sólo mide la capacidad *potencial* que tiene el proceso de cumplir con las especificaciones (Kotz y Johnson (1993), Pearn y Kotz (2006), Montgomery (2009)).

Para salvar la mencionada deficiencia se definieron varios índices alternativos que incluyen en su construcción medidas de divergencia respecto del centro nominal del proceso. Un ejemplo de éstos es el índice C_{pk} , definido de manera que, cuando las especificaciones son simétricas, captura tanto problemas en la variabilidad del proceso como problemas con el centrado respecto del objetivo especificado.

Para especificaciones simétricas, el índice C_{pk} se define como (Kane, 1986):

$$C_{pk} = \min \left\{ \frac{LSE - \mu}{3\sigma}, \frac{\mu - LIE}{3\sigma} \right\} = \frac{d - |\mu - m|}{3\sigma} \quad (2)$$

donde la última igualdad se deduce de la identidad algebraica $\min \{a,b\} = \frac{1}{2} \{(a+b) - |a-b|\}$ y $d = \frac{LSE - LIE}{2}$ es la semiapertura del intervalo de tolerancia. De esta expresión se desprende que C_p y C_{pk} están funcionalmente relacionados, pues:

$$C_{pk} = \frac{d - |\mu - m|}{3\sigma} = \frac{d}{3\sigma} \left(1 - \frac{|\mu - m|}{d} \right) = C_p \left(1 - \frac{|\mu - m|}{d} \right) \quad (3)$$

Claramente se observa que C_{pk} es siempre menor o igual a C_p , coincidiendo ambos sólo cuando el proceso se encuentra centrado ($\mu=m$). Cualquier diferencia entre los valores de ambos índices significará que el proceso no está centrado.

3.2. Estimación y propiedades distribucionales

La estimación del índice C_p implica la estimación del único parámetro involucrado, σ . Si se dispone de una muestra de tamaño n , simbolizada como $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, el estimador natural de C_p es:

$$\hat{C}_p = \frac{LSE - LIE}{6s} \quad (4)$$

donde s es el estimador habitual de la desviación estándar del proceso. Bajo el supuesto de distribución normal, Chou y Owen (1989) obtuvieron la función de densidad del estimador \hat{C}_p , cuya expresión es la siguiente:

$$f_{\hat{C}_p}(y) = \frac{2[\sqrt{(n-1)/2} C_p]^{n-1}}{\Gamma[(n-1)/2]} y^{-n} \exp\left[-\frac{(n-1)C_p^2}{2y^2}\right], \quad y > 0 \quad (5)$$

A partir de ella, los mismos autores, entre otros, derivaron la expresión del r -ésimo momento del estimador:

$$E(\hat{C}_p^r) = \frac{\Gamma\left(\frac{n-r-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left[\frac{n-1}{2}\right]^{\frac{r}{2}} C_p^r \quad (6)$$

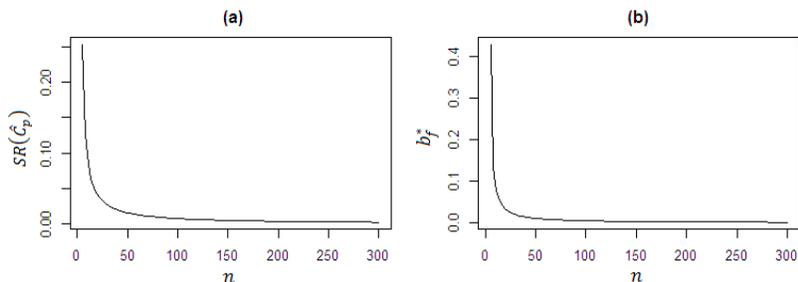
de donde se pueden deducir las expresiones para la esperanza y la variancia del estimador, que resultan:

$$E(\hat{C}_p) = \frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left[\frac{n-1}{2}\right]^{\frac{1}{2}} C_p = \frac{1}{b_f} C_p \quad (7)$$

$$Var(\hat{C}_p) = \left\{ \frac{n-1}{n-3} - \frac{n-1}{2} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \right]^2 \right\} C_p^2 = \left[\frac{n-1}{n-3} - \left(\frac{1}{b_f}\right)^2 \right] C_p^2 = b_f^* C_p^2 \quad (8)$$

donde $b_f = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \left[\frac{n-1}{2}\right]^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}$ y $b_f^* = \frac{n-1}{n-3} - \left(\frac{1}{b_f}\right)^2$. Pasos algebraicos sencillos permiten comprobar que el coeficiente de C_p en la expresión de la esperanza es mayor a uno para todos los valores de n , de lo que se deduce que \hat{C}_p es un estimador sesgado, con sesgo positivo de modo que sobreestima al verdadero valor del índice (Figura 1(a)). No obstante, es posible demostrar que tanto el sesgo como la variancia del estimador tienden a cero cuando n crece (Figura 1), por lo que \hat{C}_p resulta asintóticamente insesgado y consistente en media cuadrática (Bordignon y Scagliarini, 2002).

Figura 1: Comportamiento de: (a) el sesgo relativo y (b) el coeficiente b_f^* en la variancia del estimador \hat{C}_p en función del tamaño muestral (n).



Por su parte, el estimador propuesto para C_{pk} es aquel que resulta de reemplazar en (3) a μ y σ por sus estimadores naturales \bar{x} y s obteniéndose:

$$\hat{C}_{pk} = \frac{d - |\bar{x} - m|}{3s} = \frac{d}{3s} \left(1 - \frac{|\bar{x} - m|}{d} \right) = \hat{C}_p \left(1 - \frac{|\bar{x} - m|}{d} \right) \quad (9)$$

La deducción de la distribución de este estimador es bastante más compleja que la del estimador \hat{C}_p y fue realizada por los autores Chou y Owen en el año 1989, a partir de la definición del índice dada en (2). La función de densidad se expresa como:

$$f_{\hat{C}_{pk}}(y) = \begin{cases} 3\sqrt{n} \sum_{i=1}^2 g_{T_{n-1, \delta_i}}(t_i) & \text{para } y \leq 0 \\ 3\sqrt{n} \sum_{i=1}^2 \left[Q_{n+1} \left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}} t_i, \delta_i; 0, R \right) - Q_{n+1} \left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}} t_i, \delta_i; 0, R \right) \right] & \text{para } y > 0 \end{cases} \quad (10)$$

donde $t_1 = -t_2 = 3\sqrt{ny}$, $\delta_1 = -3\sqrt{n}C_{pu}$, $\delta_2 = -3\sqrt{n}C_{pl}$, $R = \sqrt{n-1}(t_2 - t_1)$ y $g_{T_{n-1, \delta_i}}(\cdot)$ es la distribución t no centrada de $n - 1$ grados de libertad y parámetro de no-centralidad δ_i , $Q_t(t, \delta; 0, R) = C(l) \int_0^R [\Phi(\frac{tx}{l} - \delta) x^{l-1} \phi(x)] dx$ siendo la constante $C(l) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2^{l-1}} \Gamma(\frac{l}{2})$, $\Phi(\cdot)$ la función de distribución acumulada de la distribución normal estándar, y $\phi(x)$ su densidad.

A partir de esta expresión es fácil imaginar la complejidad asociada a la obtención de la esperanza y variancia de \hat{C}_{pk} utilizando dicha densidad. Sin embargo, las mismas pueden ser obtenidas de manera explícita haciendo uso de la relación entre \hat{C}_{pk} y \hat{C}_p dada en (3). Esto fue realizado por los mismos autores Chou y Owen (1989), quienes encontraron que:

$$E(\hat{C}_{pk}) = \frac{1}{3b_f} \left\{ \frac{d}{\sigma} - \sqrt{\frac{2}{\pi n}} e^{-\frac{n}{2}A^2} - A[1 - 2\Phi(-\sqrt{n}A)] \right\} \quad (11)$$

donde $A = \frac{H}{\sigma}$, $H = |\mu - m|$ y

$$var(\hat{C}_{pk}) = \frac{n-1}{9(n-3)} \left\{ \left(\frac{d}{\sigma}\right)^2 - 2\left(\frac{d}{\sigma}\right) \left[\left(\frac{2}{\pi n}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{n}{2}A^2} + A\{1 - 2\Phi(-\sqrt{n}A)\} \right] + A^2 + \frac{1}{n} \right\} - \{E(\hat{C}_{pk})\}^2 \quad (12)$$

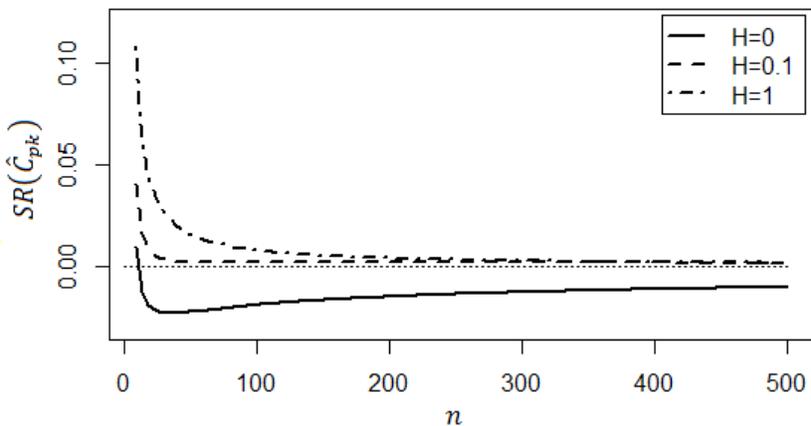
De (11) se deduce que \hat{C}_p es un estimador sesgado de C_{pk} , siendo el sesgo relativo:

$$SR(\hat{C}_{pk}) = \frac{\frac{1}{3b_f} \left\{ \frac{d}{\sigma} - \sqrt{\frac{2}{\pi n}} e^{-\frac{n}{2}A^2} - A[1 - 2\Phi(-\sqrt{n}A)] \right\}}{C_{pk}} - 1 \quad (13)$$

Kotz y Johnson (1993) encontraron que dicho sesgo es siempre positivo cuando $\mu \neq m$ ($H \neq 0$), mientras que si $\mu = m$ ($H = 0$) el sesgo es positivo para $n < 10$, y se vuelve negativo a medida que n crece. En ambos casos, procesos centrados o no, el sesgo tiende a cero cuando n tiende a infinito, por lo tanto, el estimador resulta asintóticamente insesgado (Figura 2).

Aunque no es mencionado en Kotz y Johnson (1993), se deduce que por las mismas razones, la variancia del estimador también tiende a cero a medida que aumenta el tamaño de muestra, tanto para procesos centrados como no centrados. De este modo, al igual que el estimador de C_p , el estimador de C_{pk} es también consistente en media cuadrática (De Castro, 2015).

Figura 2: Comportamiento del sesgo relativo del estimador \hat{C}_{pk} en función del tamaño de muestra (n), para procesos centrados y no centrados.



4. Vinculación entre errores de medición y capacidad de procesos

Los índices de capacidad aplicados en situaciones prácticas reales pueden verse afectados por dos fuentes de variabilidad diferentes: una debida al error de muestreo, ya que estas medidas se calculan en base a información muestral, y la otra asociada al sistema de medición que da origen a la información con la que se construyen los índices, ya que aun empleando instrumentos de medición de última tecnología no puede garantizarse la ausencia de imprecisiones. Estos últimos son frecuentemente ignorados, aún cuando se ha demostrado que la presencia de errores de medición puede causar serias distorsiones en las propiedades de los índices de capacidad, afectando su habilidad para describir correctamente el estado de capacidad real del proceso.

En el año 1997, H.L. Mittag publicó el primer trabajo sobre el efecto de los errores de medición sobre el comportamiento poblacional de los índices C_p , C_{pm} , C_{pk} y C_{pkm} considerando la posibilidad de que los errores sean tanto aleatorios como sistemáticos.

Recordando que ante la presencia de errores de medición sistemáticos, se observa la variable empírica $X^e \sim N(\mu_v = \mu + c, \sigma^2)$, en lugar de la variable latente $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, se deduce que este tipo de errores no afecta al valor del índice C_p , pero sí lo hace con cualquiera de las alternativas de índices que incluyen en su construcción al valor de la media del proceso, ya que emplearán el valor μ_v en lugar del valor real μ . Los errores sistemáticos producirán un efecto de traslación en el valor poblacional del índice, incrementándolo o reduciéndolo dependiendo de la combinación entre la dirección del sesgo y el estado de centrado del proceso. Los resultados provistos por Mittag incluyen la evaluación cuantitativa de los cambios inducidos por el error de medición y proporciona gráficos tridimensionales que muestran la distorsión ocasionada por diferentes magnitudes del error de medición como función de la capacidad real del proceso.

Para el caso de errores de medición aleatorios, si se asume para ellos un modelo normal de media cero y variancia constante, cuya ocurrencia es independiente de la variable aleatoria analizada, la variable observable resulta $X^e \sim N(\mu, \sigma_v^2 = \sigma^2 + \sigma_e^2)$. Dado que $\sigma_v^2 > \sigma^2$, es posible deducir que el error de medición estocástico produce siempre una subestimación de los índices de capacidad. En efecto, la distorsión ocasionada medida en función de lo que se denomina "*grado de contaminación*", $\tau = \sigma_e / \sigma$, evidencia que los cocientes entre el valor observado del índice y el valor real del mismo, son funciones decrecientes de τ . Esto es, los índices subvaloran la capacidad real del proceso, siendo la magnitud de la subvaloración mayor a medida que la magnitud del error de medición crece.

Los resultados provistos por Mittag (1997), aunque de gran relevancia ya que enfatizan que la bondad del análisis de capacidad puede verse significativamente afectado por la precisión del sistema de medición que se utilice para generar las mediciones, consideraron sólo el efecto de los errores de medición sobre el comportamiento poblacional de los índices, sin tener en cuenta que en la práctica los índices serán obtenidos a partir de datos muestrales y que por ello,

debe tenerse en cuenta también el efecto del error de muestreo. No obstante, su trabajo constituyó el punto de inicio para las investigaciones en esta línea, y sólo algunos años después de su publicación, los autores Bordignon y Scagliarini (2002) publicaron los resultados obtenidos al considerar el efecto de los errores de medición de tipo aleatorios sobre las propiedades distribucionales de los estimadores de los índices de capacidad C_p y C_{pk} .

Se ha mostrado anteriormente que los estimadores usuales de los índices de capacidad son sesgados, aunque asintóticamente insesgados. Los resultados provistos por estos autores muestran que la presencia de errores de medición introduce un sesgo adicional en el estimador, que no desaparece al aumentar el tamaño de la muestra y con un efecto contrario al producido por el error de muestreo. De esta manera, la combinación de ambos efectos puede ocasionar que el sesgo del estimador asuma valores tanto positivos como negativos, e incluso pueden presentarse situaciones en las que los efectos de ambos sesgos se compensen de manera exacta de modo que el sesgo total resulta nulo. Sin embargo, a medida que el tamaño muestral aumenta, el efecto del error de medición prevalece y el estimador subestima al índice real.

En lo que respecta a la variancia del estimador, los autores demuestran que la variancia del índice estimado a partir de mediciones con error es siempre menor que la del índice estimado a partir de mediciones precisas. Al combinar este resultado con los obtenidos respecto del sesgo, los autores mostraron que para tamaños de muestra pequeños a moderados, el error cuadrático medio (ECM) del estimador es menor cuando existen errores de medición, pero éste tiende a ser mayor a medida que el tamaño de muestra aumenta. Más aun, cuando el tamaño muestral aumenta, el ECM del estimador bajo errores de medición converge a una cantidad finita positiva, mientras que el ECM del estimador sin errores de medición converge a cero.

5. Efecto del error de medición constante o sistemático sobre el estimador de C_{pk}

La consideración de cómo influye la presencia de errores sistemáticos sobre los índices C_{pk} , no ha sido tratada en la literatura. Sobre este aspecto se avanza en este trabajo, estudiando dicha influencia sobre una de las propiedades distribucionales del estimador del índice C_{pk} , el sesgo relativo.

Sea $\{x_j^e, j = 1, 2, \dots, n\}$ una muestra de tamaño n para la variable $X^e = X + c$ observada utilizando un sistema de medición con error sistemático. El estimador de C_{pk} a partir de dicha muestra resulta:

$$\hat{C}_{pk}^e = \frac{d - |\bar{x}^e - m|}{3\hat{\sigma}_e} \tag{14}$$

donde $\hat{\sigma}_e^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_j^e - \bar{x}^e)^2 = \hat{\sigma}^2$ y $\bar{x}^e = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j^e = \bar{x} + c$.

Con el objetivo de estudiar el sesgo relativo de este estimador fue necesario en principio obtener su valor esperado, para lo cual se reescribe (14):

$$\hat{C}_{pk}^e = \hat{C}_p^e - \frac{|\bar{x}^e - m|}{3\hat{\sigma}_e} = \hat{C}_p - \frac{|\bar{x}^e - m|}{3\hat{\sigma}} \quad (15)$$

De (7) se tiene que $E(\hat{C}_p) = \frac{1}{b_f} C_p$, entonces:

$$E(\hat{C}_{pk}^e) = \frac{1}{b_f} C_p - \frac{1}{3} E\left(\frac{|\bar{x}^e - m|}{\hat{\sigma}}\right) \quad (16)$$

Bajo el supuesto de normalidad de la variable en estudio, $|\bar{x}^e - m|$ y $\frac{1}{\hat{\sigma}}$ son independientes, y $E\left(\frac{1}{\hat{\sigma}}\right) = \frac{1}{b_f \sigma}$ (De Castro, 2015). Reemplazando en (16) se tiene que:

$$E(\hat{C}_{pk}^e) = \frac{1}{b_f} \left(C_p - \frac{1}{3\sigma} E(|\bar{x}^e - m|) \right) \quad (17)$$

resultando entonces necesario calcular $E(|\bar{x}^e - m|)$. Siendo $\bar{x}^e = \bar{x} + c$, y por definición de esperanza:

$$\begin{aligned} E(|\bar{x}^e - m|) &= E(|\bar{x} + c - m|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y + c - m| f_{\bar{x}}(y) dy = \\ &= - \int_{-\infty}^{m-c} (y + c - m) f_{\bar{x}}(y) dy + \int_{m-c}^{+\infty} (y + c - m) f_{\bar{x}}(y) dy \end{aligned} \quad (18)$$

Sumando y restando el término $(\mu + c)$ en la integral involucrada en la expresión y resolviendo la misma se obtiene:

$$\begin{aligned} \int (y + c - \mu) f_{\bar{x}}(y) dy &= \int (y - \mu) f_{\bar{x}}(y) dy + \int (\mu + c - m) f_{\bar{x}}(y) dy = \\ &= - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \phi\left(\frac{y - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) + (\mu + c - m) \Phi\left(\frac{y - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \end{aligned} \quad (19)$$

siendo $\Phi(\cdot)$ la función de distribución acumulada de la distribución normal estándar, y $\phi(x)$ su densidad.

Retomando el cálculo en la expresión (18) se tiene que:

$$\begin{aligned}
E(|\bar{x}^e - m|) &= - \left[-\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \phi \left(\frac{y - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right) + (\mu + c - m) \Phi \left(\frac{y - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right) \right] \Big|_{-\infty}^{m-c} + \\
&+ \left[-\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \phi \left(\frac{y - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right) + (\mu + c - m) \Phi \left(\frac{y - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right) \right] \Big|_{m-c}^{+\infty} = \quad (20) \\
&= \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \phi \left(\frac{-(\mu^e - m)}{\sigma/\sqrt{n}} \right) - (\mu^e - m) \left(2\Phi \left(\frac{-(\mu^e - m)}{\sigma/\sqrt{n}} \right) - 1 \right)
\end{aligned}$$

Finalmente, reemplazando $E(|\bar{x}^e - m|)$ en la expresión (17) y trabajando algebraicamente, se obtiene la expresión de la $E(\hat{C}_{pk}^e)$, siendo la misma:

$$E(\hat{C}_{pk}^e) = \frac{1}{3b_f} \left\{ \frac{d}{\sigma} - \sqrt{\frac{2}{\pi n}} e^{-\frac{n}{2}A_c^2} - A_c [1 - 2\Phi(-\sqrt{n}A_c)] \right\} \quad (21)$$

donde $A_c = \frac{|\mu - m + c|}{\sigma} = \frac{|H + c|}{\sigma}$, $H = \mu - m$.

Con este resultado es posible entonces calcular el sesgo relativo del estimador \hat{C}_{pk}^e , el cual resulta:

$$SR(\hat{C}_{pk}^e) = \frac{\frac{1}{3b_f} \left\{ \frac{d}{\sigma} - \sqrt{\frac{2}{\pi n}} e^{-\frac{n}{2}A_c^2} - A_c [1 - 2\Phi(-\sqrt{n}A_c)] \right\}}{C_{pk}} - 1 \quad (22)$$

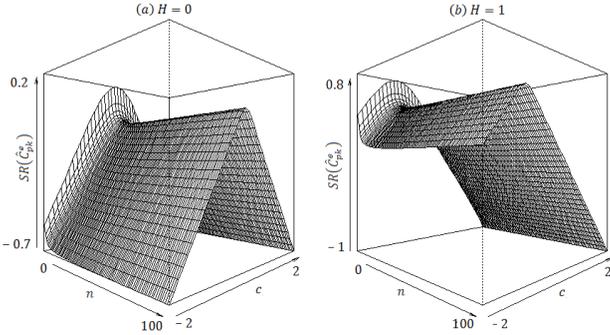
A partir de esta expresión es posible observar que el sesgo relativo proviene de dos fuentes, el error muestral y el error de medición. La Figura 3 muestra el comportamiento del sesgo relativo en función tanto del tamaño de muestra n como de la magnitud del error de medición c , para un proceso hipotético centrado ($H=0$) y otro no centrado ($H=1$), ambos con $\sigma=1$ y $d=3$. Los valores de la constante c se consideraron menores o iguales a dos en valor absoluto, de modo que en el caso más extremo el efecto combinado del descentrado del proceso y el error de medición genere una media observada que siga estando contenida dentro de los límites de especificación. Valores mayores de esta constante generarían procesos con un exagerado mal desempeño, poco probables en la práctica industrial. Este rango de variación representa una variación porcentual de a lo sumo un 67% de la semi-amplitud de tolerancia.

Para valores fijos del error de medición c , el sesgo relativo asintótico es:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} SR(\hat{C}_{pk}^e) = \frac{\frac{1}{3} \left\{ \frac{d}{\sigma} - A_c \right\}}{C_{pk}} - 1 = \frac{\frac{1}{3} \left\{ \frac{d}{\sigma} - \frac{|\mu - m + c|}{\sigma} \right\}}{C_{pk}} - 1 \quad (23)$$

de modo que el estimador resulta asintóticamente sesgado.

Figura 3: Sesgo relativo del estimador \hat{C}_{pk} en función del tamaño de muestra (n) y del error de medición (c), para: (a) un proceso centrado ($H=0$) y (b) un proceso no centrado ($H=1$).



Para valores fijos del tamaño muestral n , si se analizan las expresiones del valor esperado de \hat{C}_{pk}^e en (21) y de \hat{C}_{pk} en (11) se observa que ambas tienen la misma estructura, reemplazando en este caso a A por A_c . De esto se deduce que bajo ciertas situaciones, existe una correspondencia entre las curvas de sesgo relativo para diferentes procesos, siempre que el error de medición sea tal que A resulte igual a A_c . Por ejemplo, sean dos procesos, uno con parámetros μ_1 y σ y el otro con parámetros μ_2 y σ . Si ambos están evaluados bajo las mismas especificaciones, de modo que los valores d y m coinciden en ambos casos, entonces la presencia de error de medición sistemático en uno de ellos llevará a curvas de sesgo relativo idénticas para ambos procesos toda vez que la magnitud del error sea tal que $|\mu_2 + c - m| = |\mu_1 - m|$. Esto significa que la curva de sesgo relativo para el estimador calculado en una situación en la que existe error de medición sistemático, es equivalente a la que se obtiene en otra situación con datos libres de error de medición, es decir, tendrá la apariencia de las curvas mostradas en la Figura 2.

Para un proceso particular dado, dependiendo de cómo se combinen los valores de c y de H , el valor esperado de \hat{C}_{pk}^e puede ser tanto mayor como menor que el de \hat{C}_{pk} y por ende, lo mismo sucederá con los correspondientes sesgos relativos, cuyas curvas se trasladarán en el plano hacia arriba o hacia abajo en función de ello. Las Figuras 4 y 5 muestran algunas de las posibles situaciones en procesos hipotéticos ($d=3, \sigma=1$).

La Figura 4 muestra el comportamiento del sesgo relativo de \hat{C}_{pk}^e en procesos centrados ($H=0$) para diferentes magnitudes del error de medición c . Se observa que el sesgo es positivo sólo para valores de n muy pequeños, combinados con valores del error de medición muy pequeños, mientras que el comportamiento general muestra que el sesgo es negativo y que el mismo aumenta en valor absoluto conforme lo hace la magnitud del error. Como referencia se muestra la

curva correspondiente a $c=0$, es decir, el sesgo relativo para un proceso centrado sin error de medición.

Por otro lado, en la Figura 5 se muestra el comportamiento del sesgo relativo para el caso de procesos no centrados, distinguiendo las situaciones de corrimientos a la derecha ($H>0$) o a la izquierda ($H<0$) del valor objetivo, considerando un valor arbitrario de corrimiento de $|H|=1$.

Las curvas graficadas muestran el comportamiento descrito anteriormente, dependiendo de cómo resulte la combinación de valores de H y de c el sesgo relativo aumenta o disminuye su valor en un sentido o en otro, comparado con la situación en la que no existe error de medición.

Figura 4: Comportamiento del sesgo relativo para procesos centrados en función del tamaño muestral (n), para valores fijos del error de medición (c).

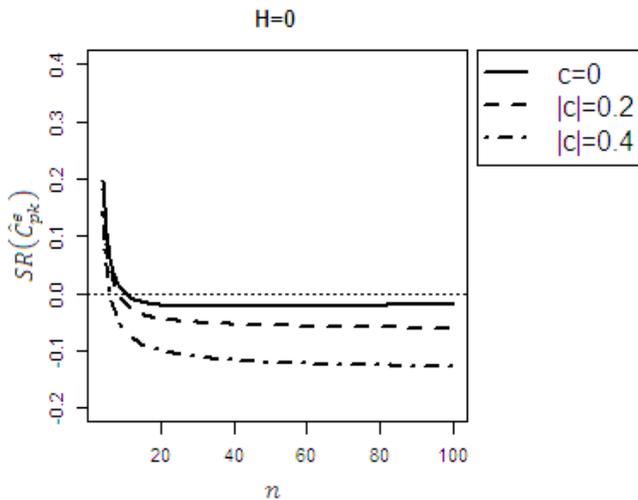
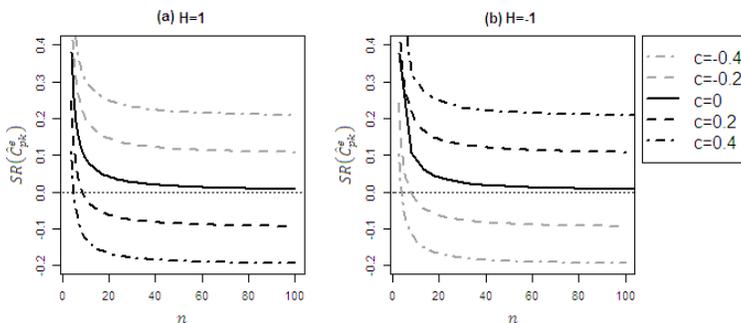


Figura 5: Comportamiento del sesgo relativo para procesos no centrados en función del tamaño muestral (n), para valores fijos del error de medición (c).



En resumen, dependiendo de las características del proceso en particular que se esté estudiando, la presencia de error de medición sistemático puede ocasionar distorsiones en cualquier sentido. Al igual que se ha visto en los antecedentes comentados, incluso, habrá un punto intermedio en el que las diferentes fuentes de error se compensen llevando a sesgos nulos. En efecto, si se grafican las curvas de sesgo relativo para valores fijos de n , en función de la magnitud del error de medición (Figuras 6 y 7), se observa que en cada caso existen combinaciones de valores de n y de c para los que el sesgo relativo resulta nulo.

Figura 6: Comportamiento del sesgo relativo para procesos centrados ($H=0$) en función del error de medición (c), para tamaños de muestra (n) fijos.

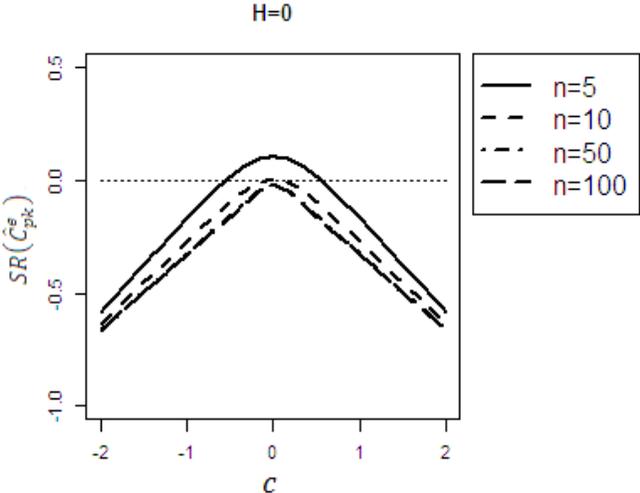
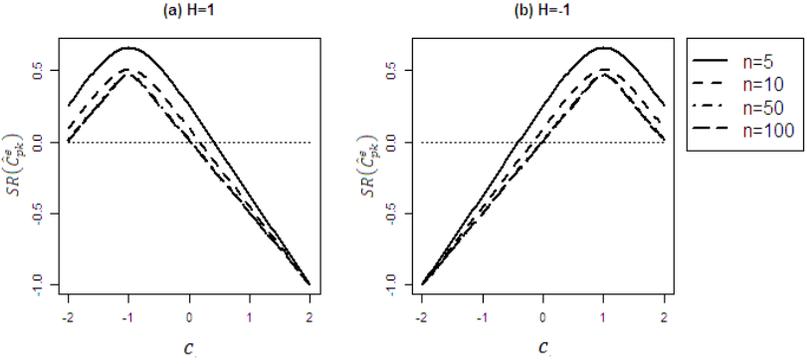


Figura 7: Comportamiento del sesgo relativo para procesos no centrados ((a) $H=1$, (b) $H=-1$) en función del error de medición (c), para tamaños de muestra (n) fijos.



6. Discusión y conclusiones

Analizar la capacidad de los procesos para satisfacer estándares de calidad prefijados es una de las etapas fundamentales involucradas en las estrategias de mejora continua de la calidad, que permiten a las empresas y organizaciones actuales competir en el mercado global, garantizando su rentabilidad a largo plazo. Los índices de capacidad son medidas desarrolladas con este propósito particular: comparar el comportamiento del proceso con las especificaciones impuestas al mismo. Para su implementación, al igual que con cualquier método de análisis estadístico, es requisito fundamental disponer de información cuantitativa sobre los procesos, en general obtenida realizando mediciones sobre los productos o servicios resultantes del proceso. Por ende, el éxito en el uso de la estadística como metodología de análisis de la información para la toma de decisiones y la mejora de la calidad, está intrínsecamente ligado a la calidad de dichas mediciones. El interrogante que surge de inmediato es cuál es el efecto que causaría sobre los resultados de los métodos estadísticos utilizados, la posible existencia de errores de medición en los datos.

En este trabajo se ha abordado este interrogante para el caso particular del análisis de capacidad de procesos. Se estudiaron los antecedentes existentes en cuanto al análisis de los efectos que la presencia de errores de medición causa sobre las propiedades de dos de los índices de capacidad más utilizados y difundidos, el índice C_p y el índice C_{pk} y se abordó también el estudio de una situación particular no tratada aún en la literatura.

Cuando no existen errores de medida, los estimadores \hat{C}_p y \hat{C}_{pk} son ambos sesgados, aunque para ambos índices tanto el sesgo como la variancia tienden a cero a medida que n crece, por lo que ambos estimadores son asintóticamente insesgados y consistentes en media cuadrática.

Sólo existen antecedentes en el estudio del efecto de la presencia de errores de medición sobre estas propiedades distribucionales para el caso de errores de medición aleatorios, cuyos resultados muestran que los estimadores de ambos índices son también sesgados, aunque no asintóticamente insesgados. Si bien existen valores “umbrales” para el grado de contaminación producido por el error de medida, para los que los sesgos de los estimadores con y sin error coinciden, a medida que el grado de contaminación aumenta el efecto del error de medición tiende a predominar aumentando la magnitud del sesgo. Similares conclusiones se obtuvieron para el error cuadrático medio, para el que se encontraron situaciones muy puntuales en las que es posible que el EMC de los estimadores con errores de medida sea menor que el de los estimadores sin error, aunque en general, y para tamaños de muestra de moderados a grandes, el primero tiende a ser definitivamente más grande.

En lo que respecta a la influencia del error de tipo sistemático en las propiedades distribucionales del estimador \hat{C}_{pk} , en este trabajo se abordó el estudio de su sesgo relativo. Las conclusiones halladas indican que el estimador basado en

datos con error constante, es sesgado, más aún, asintóticamente sesgado. Para procesos centrados el sesgo es en general negativo (es positivo sólo para tamaños de muestra muy pequeños), y su magnitud aumenta con la magnitud del error. Para procesos no centrados, dado que la naturaleza de este tipo de error genera un corrimiento en la media del proceso, dependiendo de cómo se combinen los valores del error de medición y del descentrado del proceso, el estimador basado en datos con error de medición puede ser más o menos sesgado que el basado en datos libres de error y los sesgos pueden ser tanto positivos como negativos. Asimismo, se generan situaciones “de corte” en las que ambos efectos se cancelan, resultando sesgo nulo.

Para finalizar, es importante destacar que en todas las situaciones analizadas la presencia de errores de medida en los datos causa serias distorsiones en el comportamiento de los índices, afectando la habilidad de las medidas para reflejar correctamente la capacidad real de los procesos. Más aún, dado que las distorsiones pueden darse en cualquier sentido, el valor que se obtiene del índice podría estar tanto sub como sobre estimando la capacidad real del proceso, señalando falta de capacidad cuando el proceso es en realidad capaz, o bien no detectando problemas para cumplir las especificaciones cuando en realidad existen. Es claro que la toma de decisiones y la definición de acciones de mejora basadas en esta información podrían llegar a ser completamente perjudicial para el proceso.

Aun cuando en la práctica los índices de capacidad sean utilizados con otras mediciones o indicadores que pueden advertir sobre la existencia de una falla en alguno de los sistemas de medición, es importante descubrir cuál es el efecto que estos errores de medición podrían provocar en el contexto de estudiar o determinar la capacidad de los procesos. El estudio presentado hace resaltar la importancia de asegurar, antes de evaluar cualquier acción de mejora, la calidad de los propios sistemas de medición que darán origen a la información que se analizará.

Referencias bibliograficas

- AIAG-Automotive Industry Action Group (2002). *Measurement System Analysis*, (3ª ed). Detroit, MI.
- Bordignon, S. y Scagliarini, M. (2002). Statistical analysis of process capability indices with measurement errors. *Quality and Reliability Engineering International*, 18, 321-332.
- Chou, Y-M y Owen, D.B. (1989). On the distributions of the estimated process capability indices. *Communications in Statistics – Theory and Methods*, 18(12), 4549-4560.
- Crosby, P.B. (1979). *Quality is free: The art of making quality certain*. (1ª ed.) New York: McGraw Hill.
- De Castro, M.L. (2015). *Efecto del error de medición en algunos índices de capacidad univariados* (Tesina de grado). Directora: Dra. Dianda, Daniela. Universidad Nacional de Rosario. Facultad de Ciencias Económicas y Estadística.
- Dianda, D.F. (2015). *Estudio Estadístico de Sistemas de Medida e Indicadores de Capacidad de Procesos Multivariados, en Contextos de Mejora de la Calidad y la Productividad* (Tesis Doctoral). Universidad Nacional de Rosario. Facultad de Ciencias Económicas y Estadística.
- Dianda, D.F. (2008). *Estudio del sistema de medida con ensayos destructivos. Una aplicación sobre tiempos de producción* (Tesina de grado de Licenciatura en Estadística). Universidad Nacional de Rosario. Facultad de Ciencias Económicas y Estadística.
- Feigenbaum, A.V. (1990). *Total Quality Control*. (4ª ed.) New York: McGraw Hill.
- Gutiérrez Pulido, H. y de la Vara Salazar, R. (2009). *Control Estadístico de Calidad y Seis Sigma*, (2ª ed). New York: Mc Graw Hill.
- ISO, Organización Internacional para la Estandarización (2015). *Norma Internacional ISO 9001:2015, Sistemas de gestión de la calidad*. Secretaría Central de ISO. Ginebra, Suiza.
- Juran, J.M. (1981). *Quality Control Handbook*. New York: McGraw Hill.
- Kane, V.E. (1986). Process Capability Indices. *Journal of Quality Technology*, 18, 41-52.

- Kotz, S. y Johnson, N.L. (1993). *Process Capability Indices*. Springer-Science+Business Media.
- Mittag, H-J. (1997). Measurement error effects on the performance of process capability indices. *Frontiers in Statistical Quality Control*, 5, 195-206.
- Montgomery, D. C. (2009). *Introduction to Statistical Quality Control*. (6ª ed.) New York: John Wiley & Sons.
- Pagura, J., Quaglino, M., Dianda, D., Lupachini, E. (2010). Estudio de sistemas de medida con ensayos destructivos. Una aplicación sobre tiempos de producción. *Revista de Ciencias Económicas y Estadística, SaberEs*, 2, 59-72.
- Pearn, W.L. y Kotz, S. (2006). Encyclopedia and Handbook of Process Capability Indices. A Comprehensive Exposition of Quality Control Measures. *Series on Quality, Reliability and Engineering Statistics*, 12.